FONCTIONS AFFINES, DROITES ET SYSTÈMES

Ph DEPRESLE

26 juin 2015

Table des matières

1 Fonctions affines

1.1 Définition, Propriétés

Définition 1. *a et b étant deux réels*
$f : x \mapsto ax + b$, est appelée fonction affine.
Sa courbe représentative est la droite d'équation $y = ax + b$.

Propriétés 1. *Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.*

- ◇ *Si $a > 0$, alors f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
- ◇ *Si $a = 0$, alors f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.*
- ◇ *Si $a < 0$, alors f est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*

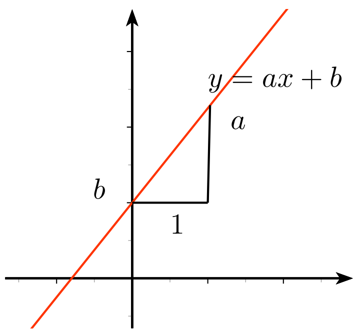
1.2 Représentation graphique

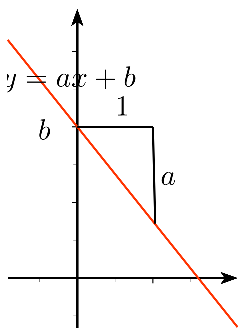
Si $a > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$ax + b$	$\nearrow$

Si $a < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$ax + b$	$\searrow$





x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+$	0	$-$

1.3 Proportionnalité des accroissements

Propriétés 2. *Pour une fonction affine, l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.*

Démonstration
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Soient x_1 et x_2 deux nombres réels quelconques.
$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$.▲

2 Équations de droites

2.1 Caractérisation analytique d'une droite

Soient A et B deux points distincts du plan.

Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les points A, B, M sont alignés, donc si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2.2 Vecteur directeur

Définition 2. *Soit une droite (d). On dit que le vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d) si il existe deux points A et B de la droite (d) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.*

Propriétés 3. *Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.*

2.3 Équation cartésienne d'une droite

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

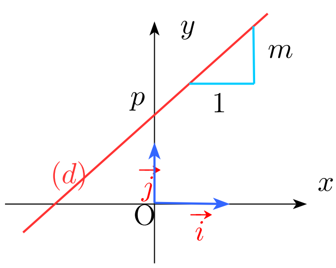
Propriétés 4.

- *Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.*
  Une telle équation est appelée équation cartésienne de la droite.
- *Réciproquement, si a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, alors l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.*

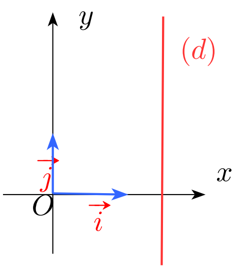
2.4 Équation réduite d'une droite

Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Si $b \neq 0$ une équation de la droite (d) est : $y = mx + p$ où on a posé $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{b}$
  L'équation $y = mx + p$ est appelée équation réduite de (d).
  m est appelé coefficient directeur de la droite.
  p est l'ordonnée à l'origine.
  un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.



- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$. L'équation réduite de (d) est $x = p$ avec $p = -\dfrac{c}{a}$.
  La droite (d) est parallèle à l'axe des ordonnées et $\vec{j}$ est un vecteur directeur.



Propriétés 5. *Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts d'une droite δ tels que $x_A \neq x_B$ alors la droite δ a pour coefficient directeur $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$*

3 Droites parallèles

Propriétés 6. *Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan.*
Soient δ et δ' deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
δ et δ' sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Démonstration
La droite δ a une équation de la forme $y = ax + b$.
La droite δ' a une équation de la forme $y = a'x + b'$.
Dire que les deux droites sont parallèles revient à dire que leur vecteur directeur sont colinéaires.
Soit que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ a' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est à dire que $a = a'$.

4 Droites et système d'équations linéaires

4.1 Système linéaire

Définition 3. *Soit S le système d'équations :* $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels donnée et x et y sont deux variables réelles.
Résoudre le système (S) revient à trouver tous les couples réels $(x; y)$ vérifiant simultanément les deux équations du système.

4.2 Système linéaire et droites

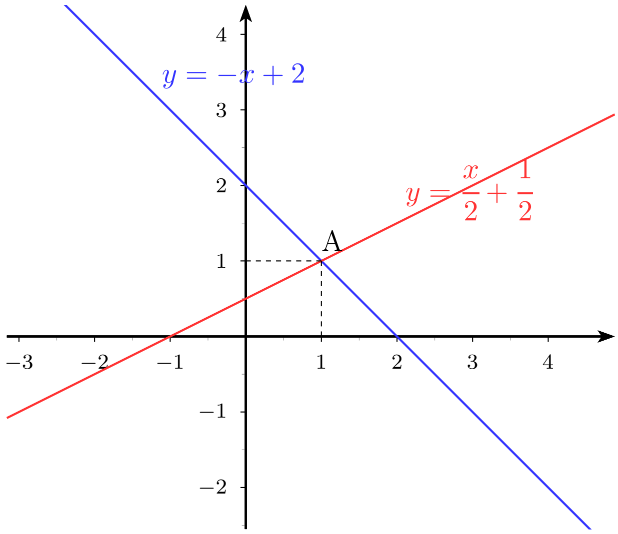
Exemple : Soit S le système d'équations : $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

1. Résoudre algébriquement ce système.
2. Interpréter graphiquement.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \right. \iff \begin{cases} x + y = 2 \\ 3y = 3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_1 + L_2 \to L_2 \end{array} \right. \iff \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

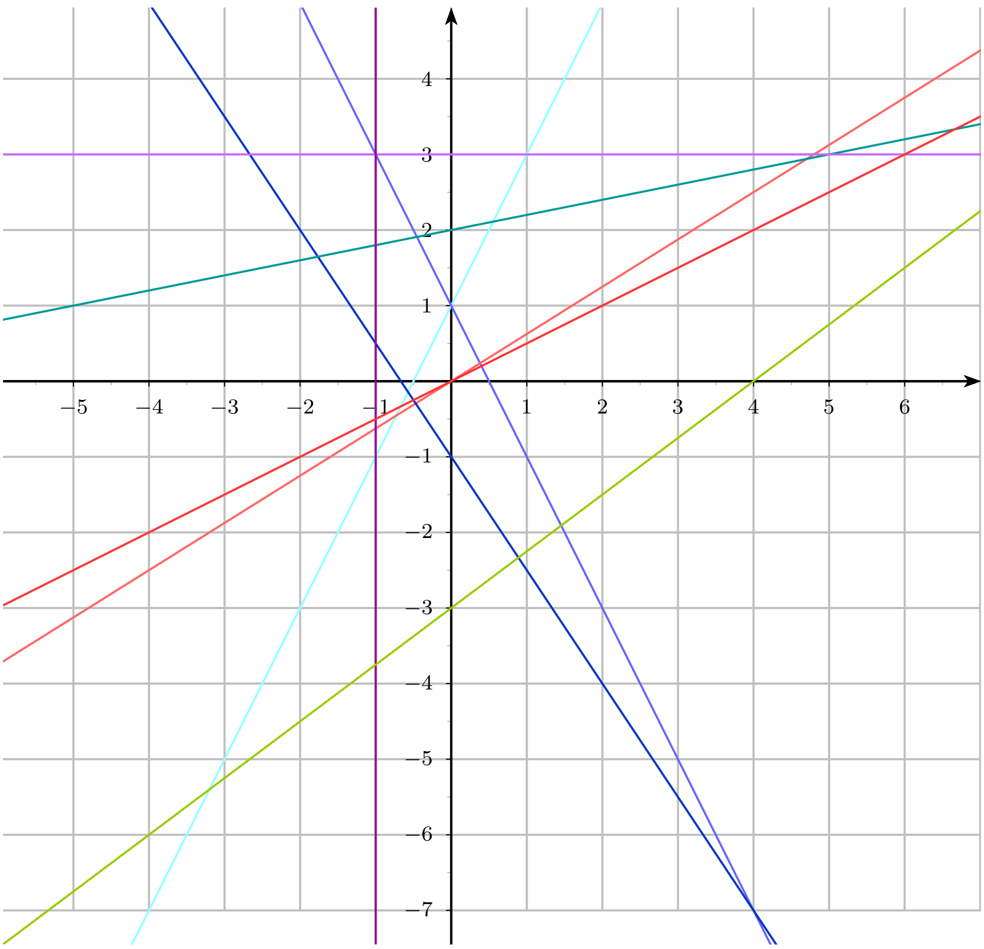
   Soit $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

2. Soit δ la droite associée à $x + y = 2$ son équation est $y = -x + 2$. Soit δ' la droite associée à $-x + 2y = 1$ son équation est $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. On retrouve que les deux droites sont sécantes et ont pour point d'intersection le point $A(1, 1)$.



5 Les exercices

1. Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ on considère les points $A\,(2;5)$ et $B\,(3;7)$.
   (a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   (b) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=\dfrac{x}{2}+4$
      i. Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
      ii. Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont sécantes.
      iii. Calculer les coordonnées du point I intersection des droites (AB) et $\mathcal{D}$.
2. Lire les diverses équations de droite suivantes :



3. Le tableau de valeurs incomplet suivant est le tableau de valeurs d'une fonction affine f

x	-2	4	7	
$f(x)$	5	-4		10

   (a) Déterminer la fonction f.
   (b) Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
   (c) Donner, en justifiant, le sens de variation de f.
   (d) Recopier et compléter le tableau de valeurs

4. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. Si la droite a pour équation $x = 5$ alors cette droite est	☐ parallèle à l'axe des abscisses ☐ parallèles à l'axe des ordonnées ☐ quelconque
2. Deux droites parallèles ont des vecteurs directeurs	☐ opposés ☐ colinéaires ☐ inverse
3. Si $A(2;-1)$ et $B(-2;1)$ alors une équation de (AB) est	☐ $y = \frac{1}{2}x + 1$ ☐ $y = 2x$ ☐ $y = -\frac{1}{2}x$
4. Si $A(-2;-3)$ $B(2;3)$ $C(6,9)$ alors les coordonnées du centre de gravité sont	☐ $G(2;3)$ ☐ $G(3;2)$ ☐ $G(-2;2)$

6 Les exercices corrigés

1. (a) Équation de la droite (AB) :
   $x_A \neq x_B$ donc de la forme $y = ax + b$.
   $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{7-5}{3-2} = 2$.
   $(AB) : y = 2x + b$.
   $A \in (AB)$ donc $5 = 2 \times 2 + b$ soit $b = 1$.
   $(AB) : y = 2x + 1$.

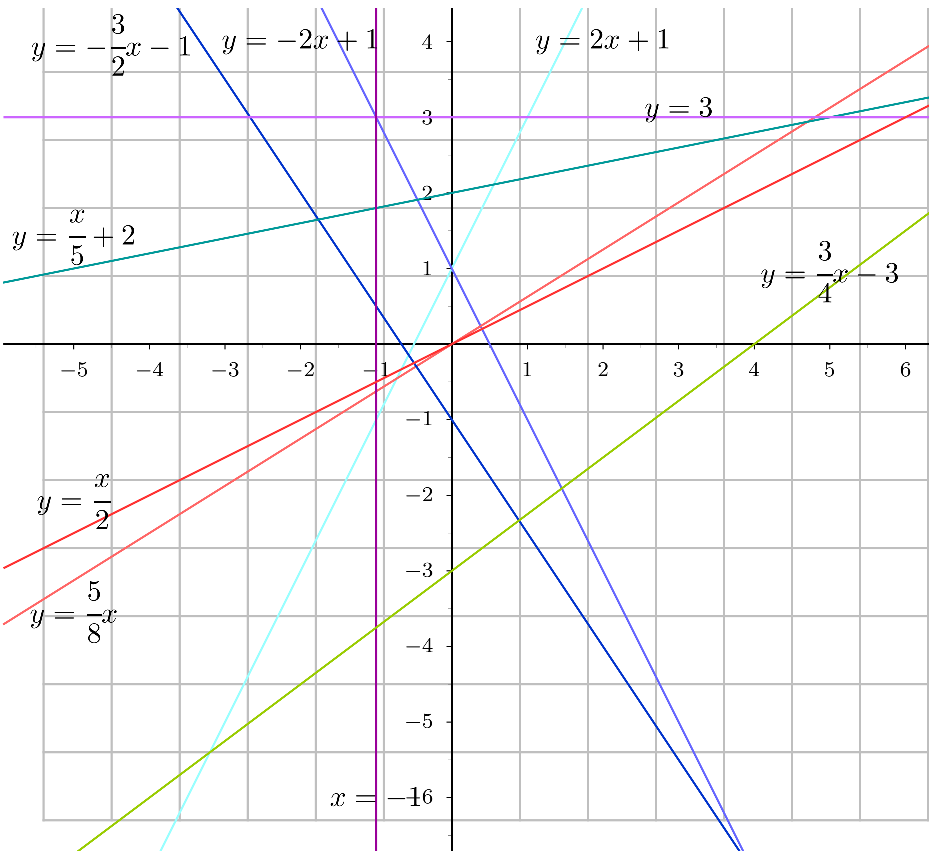
   (b) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 4$.

   i. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   ii. le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.
   Conclusion : les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont sécantes.

   iii. Il faut résoudre le système :
   $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ x - 2y = -8 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ 3y = 15 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_1 - 2L_2 \to L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ y = 5 \end{array}\right.$
   Soit $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 5 \end{array}\right.$

2. Les diverses équations des droites suivantes sont :



3. Le tableau de valeurs incomplet suivant est le tableau de valeurs d'une fonction affine f

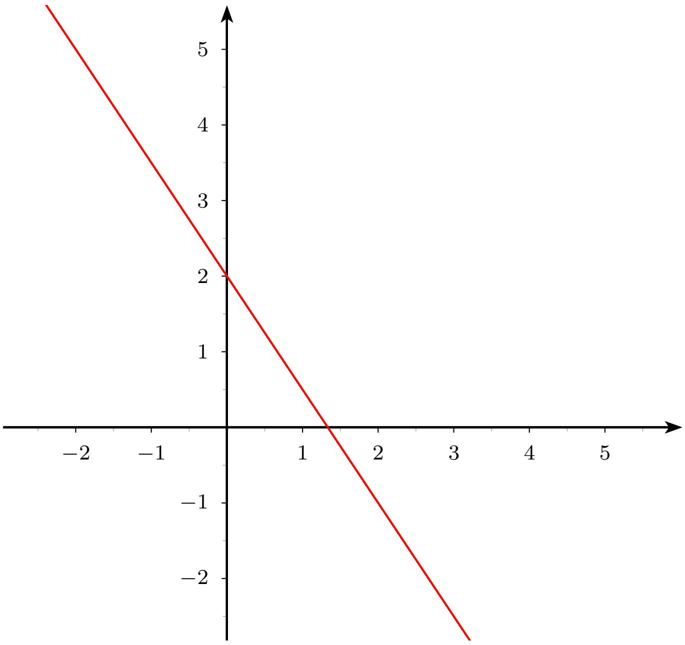
x	-2	4	7	
$f(x)$	5	-4		10

(a) La fonction f est une fonction affine donc $f(x) = ax + b$ et on a $f(-2) = 5$ et $f(4) = -4$.

On trouve $a = -\dfrac{3}{2}$ et $b = 2$.

On a donc $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + 2$

(b) on otient :



(c) Le coefficient de f est négatif donc la fonction f est décroissante, c'est ce que l'on voit sur le dessin.

(d) on doit calculer $f(7)$ et trouver l'antécédent de 10.

x	-2	4	7	$\dfrac{-16}{3}$
$f(x)$	5	-4	$\dfrac{-17}{2}$	10

4. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. Si la droite a pour équation $x = 5$ alors cette droite est	☐ parallèle à l'axe des abscisses ■ parallèles à l'axe des ordonnées ☐ quelconque
2. Deux droites parallèles ont des vecteurs directeurs	☐ opposés ■ colinéaires ☐ inverse
3. Si $A(2;-1)$ et $B(-2;1)$ alors une équation de (AB) est	☐ $y = \frac{1}{2}x + 1$ ☐ $y = 2x$ ■ $y = -\frac{1}{2}x$
4. Si $A(-2;-3)$ $B(2;3)$ $C(6,9)$ alors les coordonnées du centre de gravité sont	■ $G(2;3)$ ☐ $G(3;2)$ ☐ $G(-2;2)$